**MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 7**

a) Ještě užití věty o limitě monotónní posloupnosti:

Definujme rekurentně posloupnost $\{a_n\}$ : $a_1 = 2$ , $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$ .

b) A nekonečné řady :

1. Pokuste se sečíst řadu:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-3n}$ ; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ ;

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ ( Rada: rozložte zlomek $\frac{1}{4n^2-1}$ na rozdíl dvou zlomků);

2. Ukažte že divergují řady:

   a) ( užitím nutné podmínky konvergence řad)

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^2$ ; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ ; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$ nebo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ ;

   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ ( jinak „zapsáno" $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n+1}{n})$.

3. Na cvičení 15.11. jsme si dokázali tvrzení (srovnávací kriterium konvergence řad):

   Je-li $0 \le a_n \le b_n$ , $n \in N$, potom, konverguje-li posloupnost $\{ \sum\limits_{n=1}^{N} b_n \}$, pak také konverguje posloupnost $\{ \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \}$ .

   Rozhodněte (užitím tohoto tvrzení) o konvergenci , resp.divergenci, řady :

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot \sqrt{n}}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+3}$ ; $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-1}$ ; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n-1}$ ; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n^2+1}\right)^2$ .

4. A „dobrovolně" navíc, zkuste dokázat (limitní srovnávací kriterium):

   Je-li $0 < a_n \le b_n$ , $n \in N$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A, A > 0$ , pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě když konverguje řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ .

   Rozhodněte (užitím tohoto kriteria) o konvergenci , resp.divergenci, řady :

   $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+3}$ ; $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-1}$ ;